

**ÜBER EINE KLASSE
BOREL-MONOGENER FUNKTIONEN
UND DEREN ANWENDUNG AUF DIE
WERTEVERTEILUNGSTHEORIE**

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jörg Winkler

aus Berlin

1964

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

**ÜBER EINE KLASSE
BOREL-MONOGENER FUNKTIONEN
UND DEREN ANWENDUNG AUF DIE
WERTEVERTEILUNGSTHEORIE**

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jörg Winkler

aus Berlin

1. Referent: Prof. Dr. A. Dinghas

2. Referent: Prof. Dr. H. Pachale

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 1964

Tag der Promotion:

16. DEZ. 1964



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	II
Teil I	
Die Klassen F_q Borel-monogener Funktionen	1
1. Abgrenzung der Funktionen $f(z) \in F_q$ und ihrer Definitionsbereiche	1
2. Vorbereitende Tatsachen über die Definitionsbereiche C_1	3
3. Erste Eigenschaften der Funktionen $f(z) \in F_q$	5
4. Eindeutigkeit der Funktionen $f(z) \in F_q$	6
5. Folgerungen aus der Eindeutigkeit der Funktionen $f(z) \in F_q$	12
6. Die Singularität der Funktionen $f(z) \in F_q$	14
Teil II	
Anwendungen auf die Funktionentheorie	17
1. Nichtanalytische Funktionen $f(z) \in F_q$	17
2. Eine Bemerkung zur Fortsetzbarkeit der Funktionen $f(z) \in F_q$ und der analytischen Funktionen	20
3. Bemerkungen über erreichbare Punkte von C_1	25
4. Beziehungen zur Theorie der Ausfüllungskreise	27
5. Ausfüllungskreise meromorpher Funktionen bei beliebiger Lage der Singularitäten	31
Literaturverzeichnis	34

Einleitung

Eine analytische Funktion $w(z)$ ist durch sämtliche Werte von $\frac{d^n w(z)}{dz^n}$ an irgendeiner Stelle ihres Existenzgebietes eindeutig bestimmt.

J. Hadamard warf die Frage auf, ob diese Eigenschaft auch nicht analytischen Funktionen zukommt und führte damit zum Begriff der quasi-analytischen Funktionsklassen, den z.B. P. Turan in [XIV] (S. 85) folgendermaßen formuliert:

Ist F eine Funktionsklasse, und folgt aus der "lokalen Identität" je zweier Funktionen aus F ihre "globale Identität", so ist F eine Klasse quasi-analytischer Funktionen.

Diese Erklärung ist so allgemein gehalten, weil sich "lokale Identität" und "globale Identität" unterschiedlich auffassen lassen, worauf P. Turan in [XIV] anhand der Ergebnisse von S. Bernstein, N. Levinson und insbesondere der Ergebnisse von S. Mandelbrojt eingeht.

In der vorliegenden Arbeit werden beliebig oft differenzierbare Funktionen $f(z)$ betrachtet, wird "globale Identität" als Identität in fast allen Punkten des Definitionsbereiches D der betreffenden Funktionen interpretiert und "lokale Identität" folgendermaßen präzisiert:

- $q_1)$ Identität in fast allen Punkten des Durchschnitts einer Kurve mit D ,
- $q_2)$ Identität in einer Punktfolge von D mit einem Häufungspunkt in D
- und $q_3)$ Identität aller Werte $\frac{d^n f(z)}{dz^n}$ in einem Punkt aus D .

q_3 entspricht also der Frage J. Hadamards, die von A. Denjoy, E. Borel und T. Carleman für Klassen R_f reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen vollständig beantwortet wurde [VI] :

$$(0.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Gilt für jede Funktion } f(x) \text{ aus } R_f \text{ Supr} \left\{ \left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \right\} \leq M_n, \text{ so ist} \\ R_f \text{ genau dann quasi-analytisch, wenn die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} (M_n)^{-\frac{1}{n}} \text{ divergiert.} \end{array} \right.$$

Schon E. Borel untersuchte auch komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen unter dem Gesichtspunkt quasi-analytischer Funktionsklassen. Von diesen Untersuchungen E. Borels in [IV] geht die vorliegende Arbeit aus. Hierbei werden, wie schon bei Borel, folgendermaßen konstruierte Existenzbereiche C betrachtet:

Ist G ein Gebiet der komplexen Ebene, a_ν eine abzählbare Punktmenge aus G , r_ν eine Folge positiv reeller Zahlen und ω die Menge der natürlichen Zahlen, so ist für jedes $p \in \omega$

$$C_p =_{\text{def}} G \setminus \bigcup_{\nu \in \omega} \{z \mid |z - a_\nu| < 2^{-p} r_\nu\} \quad \text{und} \quad C =_{\text{def}} \bigcup_{p \in \omega} C_p.$$

Für die in jedem Punkt aus C eindeutig erklärten und in jedem C_p differenzierbaren Funktionen ("fonctions monogènes non-analytiques") gilt eine der Cauchyschen Integralformel entsprechende Formel, die mit gewisser Modifizierung in gleicher Weise beweisbar ist, wie die Cauchysche Integralformel. Dies ist in der Diplomarbeit "Quasi-analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen" des Verfassers durchgeführt. Borel vermutet in [IV] dieses Ergebnis, gibt die Integralformel aber nur unter stärkeren Voraussetzungen an. Die in jedem Punkt aus C eindeutig erklärten Funktionen, die dieser Integralformel genügen, bilden die Klasse der Borel-monogenen Funktionen. In der vorliegenden Arbeit werden nun Borel-monogene Funktionen betrachtet, die sich in jedem Punkt von C als Grenzwert analytischer Funktionen darstellen lassen, wodurch der Beweis der entsprechenden Integralformel erheblich verkürzt wird. *) Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Borel-monogenen Funktionen auf die Werteverteilungstheorie anzuwenden, was vom Inhalt und der Methode her zu neuen Ergebnissen führt. Hierzu werden zunächst die benötigten Ergebnisse über die betrachteten Borel-monogenen Funktionen hergeleitet, die teilweise in der Literatur überhaupt nicht oder ohne Beweis vorliegen.

Die Klasse F der in dieser Arbeit untersuchten Funktionen wird im Teil I, Abschnitt 1 angegeben, während im Abschnitt 2 einige Hilfsmittel bzgl. der Punktmengen C_p bzw. C zusammengestellt werden. Im Abschnitt 3 wird neben anderen, einfachen Sätzen die schon erwähnte Integralformel bewiesen und dabei (wie auch in [IV]) gezeigt, daß die Funktionen aus F in fast allen Punkten ihres Existenzbereiches C beliebig oft differenzierbar sind.

E. Borel bewies nun in [IV], daß die Funktionsklasse F im Sinne von q_3 quasi-analytisch ist, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ n(\log \log |\log r_n|)^{-1} \} = 0$ gilt. Ferner bewies Carleman in [VI], daß F im Sinne von q_1 quasi-analytisch ist, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\log |\log r_n|) \cdot (|\log r_n|)^{-1}$ konvergiert. Dieses Ergebnis ist jedoch insofern schwächer, als für die Funktionen aus F aus der Voraussetzung q_1 die Voraussetzung q_3 folgt, jedoch die Umkehrung nicht ohne weiteres gilt. Borel bewies auch, daß F im Sinne von q_3 quasi-analytisch ist, wenn $\log |\log r_n| \geq n^{\epsilon}$ gilt ($\epsilon > 0$).

Im Teil I, Abschnitt 4 wird mittels des Ergebnisses (0.1) von Borel, Denjoy und Carleman gezeigt, daß F im Sinne von q_3 quasi-analytisch ist, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\log |\log r_n|)^{-1}$ konvergiert. Anschließend wird unter Angabe von Beispielen skizziert, daß sich die Ergebnisse, die sich in der vorliegenden Arbeit mittels der Funktionsklasse F gewinnen lassen, unverändert auch mittels anderer, nicht in F enthaltener Klassen Borel-monogener Funktionen erzielen lassen.

Im Teil I, Abschnitt 5 wird mittels der Eindeutigkeitsaussage des Abschnittes 4 gezeigt, daß F im Sinne von q_1 und q_2 quasi-analytisch ist. In diesem Zusammenhang ergeben sich für die Funktionen aus F einige der klassischen Funktionentheorie analoge Aussagen. Im den Teil I abschließenden Abschnitt 6 wird dann gezeigt, daß eine Funktion aus F in

*) Es werden ohne weiteren Hinweis stets Lebesguesche Maße bzw. Integrale benutzt. Ferner sind Integrationen über Punktmengen, die aus einfach geschlossenen Kurven hervorgehen, stets in mathematisch positivem Sinne orientiert.

irgendeinem Punkt ihres Existenzbereiches C entweder analytisch ist oder sich dem Satz von Casorati-Weierstraß gemäß verhält. Dies wird im Teil II zu interessanten Ergebnissen führen.

Im Teil II, Abschnitt 1 wird gezeigt, daß zu jedem Gebiet G in F eine Funktion existiert, die in keinem Punkt aus G analytisch ist. Damit ist dann gezeigt, daß F eine echte Erweiterung der Klassen analytischer und meromorpher Funktionen ist.

Im Teil II, Abschnitt 2 wird auf die Frage der eindeutigen Zuordnung von analytischen Funktionen, deren Existenzgebiete disjunkt sind, eingegangen. Diese Fragestellung wurde in der Literatur vermittlels quasi-analytischer Funktionen schon vielfach behandelt, so z. B. in [III] und [IX], und wird deshalb in dieser Arbeit nicht näher erörtert. Im Rahmen der Fragestellung dieses Abschnittes wird auch ein von E. Borel in [II] bewiesener Satz verallgemeinert, dessen Aussage nicht in der Eindeutigkeit der Funktionen aus F enthalten ist.

Im nachfolgenden Abschnitt 3 werden weitere Hilfsmittel bzgl. der Punktmengen C_p bzw. C zur Verfügung gestellt. Hier sei darauf hingewiesen, daß in der vorliegenden Arbeit eine in F (echt) enthaltene Funktionsklasse F' aus folgendem Grunde besonders genannt wird:

Für die Untersuchungen dieser Arbeit wesentliche Eigenschaften der Punkte der Definitionsbereiche der Funktionen aus F sind für die Funktionen aus F' leichter zu übersehen.

In den abschließenden Abschnitten 4 und 5 des Teils II werden die Ergebnisse der Betrachtung der Klasse F auf die Werteverteilungstheorie und insbesondere auf die Theorie der Ausfüllungskreise angewandt, was vom Inhalt und der Methode her zu neuen Ergebnissen führt. Im Abschnitt 4 werden auf diesem Wege zu erzielende Aussagen vor allem einem von O. Lehto in [XI] gegebenen Satz gegenübergestellt und erläutert. Es zeigt sich dabei, daß die vermittlels der Funktionen aus F zu gewinnenden Ergebnisse auch den Fall betreffen, daß die wesentlichen Singularitäten nicht isoliert sind. Hierauf wird näher im Abschnitt 5 eingegangen. Die in diesem Abschnitt angeführten neuen Ergebnisse liefern insbesondere Aussagen, die die Ergebnisse von K. Matsumoto [XII], [XIII] und L. Carleson [VII] ergänzen.

Vorliegende Arbeit wurde am 6. Februar 1964 als Dissertation eingereicht und nach der Prüfung in einigen Punkten gekürzt und abgeändert.

Die Klassen F_q Borel-monogener Funktionen

Abgrenzung der Funktionen $f(z) \in F_q$ und ihrer Definitionsbereiche

Sei G ein (k -fach zusammenhängendes) Gebiet der komplexen Ebene (z -Ebene), ω die Menge der natürlichen Zahlen, jedem $\nu \in \omega$ ein endlicher Anfang $\omega_\nu \neq \emptyset$ von ω und jedem geordneten Paar $(\nu, \mu) \in \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \omega \wedge \lambda \in \omega_\nu\}$ ein Punkt $a_{\nu, \mu} \in G$ zugeordnet. Sei ferner $a_{\nu, \mu}$ ein reelles $r_{\nu, \mu} > 0$ und jedem $\nu \in \omega$ eine in $G \setminus \bigcup_{\mu \in \omega_\nu} \{a_{\nu, \mu}\}$ regulär analytische Funktion $w_\nu(z)$ zugeordnet, gelte

$$V_0: \quad r = \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} r_{\nu, \mu} < \infty^{(1)},$$

und sei für alle $\nu, p \in \omega$

$$M_{\nu, p} = \sup \left\{ |w_\nu(z)| \mid z \in G \setminus \bigcup_{\mu \in \omega_\nu} \{z \mid |z - a_{\nu, \mu}| < 2^{-p} r_{\nu, \mu}\} \right\} < \infty.$$

In der vorliegenden Arbeit werden die Funktionen

$$f(z) = \sum_{\nu \in \omega} w_\nu(z)$$

untersucht, die den folgenden Voraussetzungen genügen:

$$V^*: \quad M_p = \sum_{\nu \in \omega} M_{\nu, p} < \infty \quad \text{für jedes } p \in \omega$$

und

$$V_q: \quad \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\substack{\mu \in \omega_\nu \\ r_{\nu, \mu} < e^{-q}}} (\log |\log r_{\nu, \mu}|)^{-\frac{1}{q}} < \infty \quad (q = 1 \text{ oder } q = 2).$$

Wie aus dem Vorangehenden leicht zu ersehen ist, kann im folgenden auch stets $r_{\nu, \mu} < e^{-q}$ vorausgesetzt werden, so daß V_q^* durch

$$V_q: \quad \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} (\log |\log r_{\nu, \mu}|)^{-\frac{1}{q}} < \infty \quad (q = 1 \text{ oder } q = 2)$$

ersetzt werden kann.

1) In dieser Arbeit werden Summationen über $\tau \in \omega$ mit $\tau \neq \emptyset$ als gemäß der natürlichen Anordnung von τ verstanden, und wird $\sum_{\emptyset} = 0$ gesetzt.

Die Klassen der den genannten Voraussetzungen genügenden Funktionen werden entsprechend durch F_q bezeichnet. Da aus $V_2 \supset V_1$ folgt, gilt

$$(I. 1. 1) \quad F_2 \subseteq F_1.$$

Gilt V_1 bzw. V_2 , so wird mit $l = 1$ bzw. $l = 2$ jedem $r_{\nu, \mu}$ und jedem $p \in \omega$ die positiv reelle Zahl

$$(I. 1. 2) \quad \varrho_{\nu, \mu}^{l, p} =_{\text{def}} (\log |\log 2^{-p} r_{\nu, \mu}|)^{\frac{1}{l}} + 2^{-p} r_{\nu, \mu}$$

zugeordnet, woraus für $l = 1, 2$

$$(I. 1. 3) \quad \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} 2^{-p} r_{\nu, \mu} (\varrho_{\nu, \mu}^{l, p} - 2^{-p} r_{\nu, \mu})^{-\kappa}$$

für alle $\kappa, p \in \omega$

folgt. Den $\varrho_{\nu, \mu}^{l, p}$ entsprechend sei für jedes $r_{\nu, \mu}$ und jedes $p \in \omega$

$$(I. 1. 4) \quad \varrho_{\nu, \mu}^{0, p} =_{\text{def}} 2^{-p} r_{\nu, \mu}.$$

Zur Untersuchung der Funktionen $f(z) \in F_q$ sei für jedes $\varrho_{\nu, \mu}^{l, p}$

$$K_{\nu, \mu}^{l, p} =_{\text{def}} \{z \mid |z - a_{\nu, \mu}| = \varrho_{\nu, \mu}^{l, p}\} \quad \text{und} \quad S_{\nu, \mu}^{l, p} =_{\text{def}} \{z \mid |z - a_{\nu, \mu}| < \varrho_{\nu, \mu}^{l, p}\}.$$

Für jedes $p \in \omega$ sei ferner $C_{l, p} =_{\text{def}} \bigcup_{\nu \in \omega} \bigcup_{\mu \in \omega_\nu} (S_{\nu, \mu}^{l, p})$ und $C_1 =_{\text{def}} \bigcup_{p \in \omega} C_{l, p}$.

Es gilt also stets

$$(I. 1. 5) \quad C_{l', p} \subseteq C_{l, p} \quad \text{für } l \leq l'.$$

Weiterhin seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

1. $(A)^{l, p} =_{\text{def}} A \cap C_{l, p}$ für jede Punktmenge A der z -Ebene
2. $\varrho_{\nu, \mu}^p =_{\text{def}} \varrho_{\nu, \mu}^{0, p}$, $K_{\nu, \mu}^p =_{\text{def}} K_{\nu, \mu}^{0, p}$, $S_{\nu, \mu}^p =_{\text{def}} S_{\nu, \mu}^{0, p}$, $C_p =_{\text{def}} C_{0, p}$ und $C =_{\text{def}} C_0$

3. Für jede Punktmenge A der z -Ebene wird durch A^- bzw. A^0 die abgeschlossene Hülle bzw. der offene Kern von A bezeichnet.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei gesondert darauf hingewiesen, daß die Punktfolgen $C_{l, p}$ usw. stets bzgl. eines speziellen $f(z) \in F_q$ gebildet werden.

Vorbereitende Tatsachen über die Definitionsbereiche C_1

Zunächst sei mit Rücksicht auf eine geeignete Terminologie die folgende Bezeichnung eingeführt:

Sei ein C_1 mit dem ihm zugrunde liegenden Gebiet G und ein Punkt $z \in C_1$ gegeben. Existiert dann ein $p \in \omega$ und eine z im Innern enthaltende Strecke s mit $s \cap G \subset C_{1,p}$, so wird z als in $C_{1,p}$ (linear) erreichbarer Punkt von C_1 bezeichnet.

Mit dieser Bezeichnung ergibt sich sofort der

Hilfssatz 1: Jeder in $C_{1,p}$ erreichbare Punkt von C_1 ist in einer perfekten Teilmenge von $C_{1,p}$ enthalten.

Der folgende Hilfssatz stellt sicher, daß in jedem C_1 erreichbare Punkte existieren, und zeigt damit wegen des Hilfssatzes 1 zugleich, daß kein C_1 leer ist.

Hilfssatz 2: Sei C_1 mit dem ihm zugrunde liegenden Gebiet G und ein reelles $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein nur von ε abhängiges $p \in \omega$ so daß zu jeder Strecke s mit der Länge ε unendlich viele, paarweise verschiedene, zu s orthogonale Geraden s^* mit $s^* \cap G \subset C_{1,p}$ und $s \cap s^* \neq \emptyset$ existieren.

Beweis: Wegen V_1 , (I. 1. 2) und (I. 1. 4) existiert ein nur von ε abhängiges $p \in \omega$ mit

$$(I. 2. 1) \quad \sum_{v \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_v} S_{v,\mu}^{1,p} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sei nun s eine Strecke mit der Länge ε , s^* die s enthaltende Gerade und $P_{v,\mu}^{1,p}$ die orthogonale Projektion einer jeden Kreisscheibe $S_{v,\mu}^{1,p}$ auf s^* . Wegen (I. 2. 1) gilt dann

$$(I. 2. 2) \quad \text{Das Maß von } \bigcup_{v \in \omega} \left(\bigcup_{\mu \in \omega_v} P_{v,\mu}^{1,p} \right) \text{ in } s^* \text{ ist kleiner als } \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher existieren unendlich viele, paarweise verschiedene $z_0 \in s \setminus \bigcup_{v \in \omega} \left(\bigcup_{\mu \in \omega_v} P_{v,\mu}^{1,p} \right)$. Infolge der Konstruktion dieser z_0 erfüllen die zu s orthogonalen Geraden durch diese Punkte z_0 die Behauptung des Hilfssatzes 2.

Zur späteren Verwendung sei hier noch bemerkt, daß infolge der Konstruktion der Kreisscheiben $S_{v,\mu}^{1,p}$ gilt:

(I.2.3) $s \setminus \bigcup_{\nu \in \omega, \mu \in \omega_\nu} (UP_{\nu, \mu}^{1, p})$ ist in s^* abgeschlossen.

Aus dem Hilfssatz 2 folgt aufgrund der Definition der erreichbaren Punkte sofort der

Hilfssatz 3: Sind z_1 und z_2 erreichbare Punkte von C_1 , so existieren ein $p \in \omega$ und ein z_1 und z_2 verbindendes Polygon Γ mit $\Gamma \subset C_{1, p}$.

Wird zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gemäß (I.2.1) ein $p \in \omega$ bestimmt, und werden die $S_{\nu, \mu}^{1, p}$ orthogonal auf die imaginäre und reelle Achse projiziert, so ergibt sich wegen (I.2.2) ebenso, wie sich der Hilfssatz 2 ergab, der

Hilfssatz 4: Sei C_1 mit dem ihm zugrunde liegenden Gebiet G gegeben. Dann erhält die Menge aller erreichbaren Punkte von C_1 mit Ausnahme höchstens einer Punktmenge vom Maße Null alle Punkte aus G .

Wegen des Hilfssatzes 1 ergibt sich aus dem Hilfssatz 4 die anschließende

Folgerung: Jedes C_1 enthält mit Ausnahme höchstens einer Punktmenge vom Maße Null alle Punkte des C_1 zugrunde liegenden Gebietes G .

Ähnlich, wie sich der Hilfssatz 2 ergab, ergibt sich der

Hilfssatz 5: Sei C_1 mit $l \geq 1$ gegeben. Dann ist jeder Punkt von C_1 ein in einem $C_{1-1, p}$ erreichbarer Punkt von C_{1-1} .

Beweis: Sei z_0 ein Punkt aus C_1 und $K = \{z \mid |z - z_0| = 1\}$. Dann existiert ein $p_1 \in \omega$ mit $z_0 \in C_{1, p_1}$. Wegen V_1 existiert nun ein $p \in \omega$ mit $p > p_1$ und

$$(I.2.4) \quad \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} (\varrho_{\nu, \mu}^{1, p_1})^{-1} \varrho_{\nu, \mu}^{1-1, p} < \frac{\pi}{8}.$$

Sei nun $P_{\nu, \mu}^{1-1, p}$ die Zentralprojektion einer jeden Kreisscheibe $S_{\nu, \mu}^{1-1, p}$ von z_0 aus auf K und $K' = \{z \mid \{z, z_0 - z\} \cap (\bigcup_{\nu \in \omega, \mu \in \omega_\nu} (UP_{\nu, \mu}^{1-1, p})) \neq \emptyset\}$. Wegen (I.2.4) existiert dann ein $z_1 \in K \setminus K'$. Infolge der Konstruktion von z_1 zeigt nun die z_0 und z_1 verbindende Gerade, daß z_0 ein in $C_{1-1, p}$ erreichbarer Punkt ist, woraus der Hilfssatz 5 folgt.

Ohne jede Schwierigkeit folgt aus dem Hilfssatz 2 der diesen Abschnitt abschließende

Hilfssatz 6: Seien C_1 mit $1 \geq 1$ und ein in $C_{1-1,p}$ erreichbarer Punkt $z_0 \in C_{1-1}$ gegeben. Dann existiert eine Folge erreichbarer Punkte z_ν ($\nu = 1, 2, 3 \dots$) von C_1 , die in $C_{1-1,p}$ enthalten ist und gegen z_0 konvergiert.

3. Erste Eigenschaften der Funktionen $f(z) \in F_q$

Aus (I. 1) ergibt sich in bekannter Weise sofort der

Satz 1: Jede Funktion $f(z) \in F_q$ ($q = 1$ oder $q = 2$) ist für jedes $p \in \omega$ in C_p stetig.

und der

Satz 2: Die Funktionen $f(z) \in F_q$ ($q = 1$ oder $q = 2$) bilden bzgl. der Addition und Multiplikation ihrer Funktionswerte einen kommutativen Ring mit Einselement, der die in G^* regulär analytischen Funktionen enthält.

Für die Funktionen $f(z) \in F_q$ ergibt sich auch ein Analogon zur Cauchyschen Integralformel:

Satz 3: Jede Funktion $f(z) \in F_q$ ($q = 1$ oder $q = 2$) ist in jedem in einer perfekten Teilmenge von $C_{1,p}$ enthaltenen Punkt $z \in C_{1,p}$ in der Vereinigung aller perfekten Teilmengen von $C_{1,p}$ beliebig oft differenzierbar. Ferner sind die Werte der entsprechenden κ -ten Ableitungen $f^{(\kappa)}(z)$ von $f(z)$ ($f^{(0)}(z) = f(z)$) daselbst stetig, von p unabhängig und ergeben sich als

$$(I. 3.1) \quad f^{(\kappa)}(z) = I_p^\kappa(\Gamma, f(z)) = \frac{\kappa!}{2\pi i} \left(\int_{(\Gamma)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\kappa+1}} d\zeta - \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\substack{M \in \omega_\nu \\ (D_n K_{n,p}^p)^p}} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\kappa+1}} \right) \right)$$

sofern Γ eine rektifizierbare Kurve ist, Γ das einfach zusammenhängende Gebiet D mit $D \subset G$ berandet und $f(z)$ in $(D^-)^D$ stetig ist. Weiterhin gilt (I. 3.1) mit $\kappa = 0$ für jeden Punkt $z \in C_{1,p}^{(2)}$.

Beweis: Aus dem Satz 1 und (I. 1. 2) folgt die Existenz sämtlicher Integrale in (I. 3.1). Die im folgenden betrachteten Reihen von Funktionen können jeweils in den betreffenden Punktmengen wegen $D \subseteq G$ und (I. 1. 3) durch

²⁾ In dieser Arbeit ist $\int_{\phi} g(z) dz = 0$ gesetzt.

konvergente Reihen mit positiven, vom Argument der Funktionen unabhängigen Gliedern abgeschätzt werden und konvergieren daher in diesen Punktmengen absolut und gleichmäßig. Es ergibt sich also bei Ausnutzung der Cauchyschen Integralformel

$$I_P^{\kappa}(\Gamma, f(z)) = \sum_{\nu \in \omega} I_P^{\kappa}(\Gamma, w_{\nu}^{\kappa}(z)) = \sum_{\nu \in \omega} w_{\nu}^{(\kappa)}(z) \quad .$$

Ebenso folgt auch für $\kappa \geq 0$ in jeder Punktmenge $B = \Omega \cap (D^- \setminus \{z\})^{1,p}$ die absolute und bzgl. $z' \in B$ gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu \in \omega} \delta_{\nu}^{\kappa+1}(z', z)$$

mit

$$\delta_{\nu}^{\kappa+1}(z', z) = \Omega \cap \frac{w_{\nu}^{(\kappa)}(z') - w_{\nu}^{(\kappa)}(z)}{z' - z} - w_{\nu}^{(\kappa+1)}(z) \quad ,$$

$$\lim_{z' \rightarrow z} \delta_{\nu}^{\kappa+1}(z', z) = 0 \quad \text{für jedes } \nu \in \omega$$

und

$$\frac{I_P^{\kappa}(\Gamma, f(z')) - I_P^{\kappa}(\Gamma, f(z))}{z' - z} - I_P^{\kappa+1}(\Gamma, f(z)) = \sum_{\nu \in \omega} \delta_{\nu}^{\kappa+1}(z', z) \quad .$$

Damit aber folgt in bekannter Weise der Satz 3.

Zum Abschluß dieses 3. Abschnittes sei nun noch der unmittelbar aus den Hilfssätzen 1 und 6 und dem Satz 1 folgende Satz 4 aufgeführt.

Satz 4: Ist $f(z) \in F_q$ ($q = 1$ oder $q = 2$) und gilt in jedem erreichbaren Punkt z von C_1 $f(z) = 0$, so gilt in jedem erreichbaren Punkt ζ von C $f(\zeta) = 0$.

4. Eindeutigkeit der Funktionen $f(z) \in F_q$

Wegen der Hilfssätze 1 und 4 und des Satzes 3 sind die Funktionen $f(z) \in F_q$ in fast allen Punkten aus C_1 beliebig oft differenzierbar. Im folgenden wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen die Funktionen aus F_q durch ihren Funktionswert und die Werte ihrer sämtlichen Ableitungen in einem Punkt aus C_1 eindeutig bestimmt sind. Das heißt, es wird untersucht, inwiefern zwei Funktionen aus F_q , die in einem Punkt aus C_1 in ihrem Funktionswert

und ihren sämtlichen Ableitungen übereinstimmen, in C_1 ($l=0, 1$ bzw. 2) identisch sind bzw. inwieweit die Funktionsklassen F_q in dem in der Einleitung unter q_3 präzierten Sinne quasi-analytisch sind.

Infolge des Satzes 2 braucht hierbei nur untersucht zu werden, inwiefern eine Funktion aus F_q , deren Funktionswert und deren sämtliche Ableitungen in einem Punkt aus C_1 Null sind, in C_1 ($l=0, 1$, bzw. 2) identisch Null ist.

Nach diesen Vorbemerkungen folgt jetzt der

Satz 5: Sei $f(z) \in F_1$, z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 , und gelte $f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$). Dann gilt in jedem erreichbaren Punkt z von C_1 $f(z) = 0$.

Beweis: Aufgrund der Hilfssätze 1 und 3 und des Satzes 3 ist der Beweis des Satzes 5 erbracht, wenn folgendes gezeigt wird: Ist p eine natürliche Zahl und s eine z_0 im Innern enthaltende Strecke mit

$$(I.4.1) \quad s \subset C_{1,p}$$

so folgt unter der Voraussetzung des Satzes 5

$$(I.4.2) \quad f(z) = 0 \quad \text{für jedes } z \in s.$$

Aufgrund der Konstruktion der $C_{1,p}$ und $\mathfrak{S}_{\nu,\mu}^{l,p}$ kann hierbei wegen der Voraussetzung $V_0 p$ als so groß vorausgesetzt werden, daß für alle $\nu \in \omega$ und $\mu \in \omega_\nu$

$$(I.4.3) \quad 0 < \mathfrak{S}_{\nu,\mu}^{0,p} = \mathfrak{S}_{\nu,\mu}^p \leq e^{-e}$$

gilt. Außerdem kann zum Beweis von (I.4.2) ohne Einschränkung vorausgesetzt werden, daß s in der reellen Achse enthalten ist,

$$z_0 = 0$$

und für ein reelles t_0 mit $0 < t_0 < \infty$

$$(I.4.4) \quad s = \{ x \mid -t_0 \leq x \leq t_0 \}$$

gilt.

Ferner wird vorausgesetzt, daß

$$(I.4.5) \quad \bar{z} \in C_p \quad \text{für} \quad z \in C_p$$

und

$$(I.4.6) \quad \overline{f(\bar{z})} = f(z) \quad \text{für} \quad z \in C_p$$

gilt. Auch diese Voraussetzungen sind ohne jede Einschränkung möglich, weil wegen der Definition der Funktionsklassen F_q und wegen des Satzes 2 mit $f(z) \in F_q$ auch $\overline{f(\bar{z})} \in F_q$ und

$$f_1(z) =_{\text{def}} f(z) \cdot \overline{f(\bar{z})} \in F_q$$

gilt, $f_1(z)$ die Bedingungen (I.4.5) und (I.4.6) erfüllt und den Voraussetzungen des Satzes 5 mit $f(z)$ zugleich genügt, ferner aber für alle $z \in s$ aus $f_1(z) = 0$ auch $f(z) = 0$ folgt.

Aus (I.4.1) folgt nun zunächst, daß eine den Voraussetzungen des Satzes 3 genügende Kurve Γ der Länge L mit

$$(I.4.7) \quad 0 < \delta = \inf \{ |z - x| \mid x \in s \wedge z \in \Gamma \}$$

existiert, die das einfach zusammenhängende Gebiet D berandet.

Aus (I.4.4), (I.4.6), (I.4.7) und dem Satz 3 folgt jetzt weiter, daß $f(z)$ auf s eine im Intervall

$$I =_{\text{def}} \{ x \mid -t_0 < x < t_0 \}$$

beliebig oft differenzierbare und reellwertige Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x ist und für jeden Punkt $x \in I$ für alle $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

$$(I.4.8) \quad \frac{d^\kappa f(x)}{dx^\kappa} = I_p^\kappa(\Gamma, f(x))$$

gilt. Bezeichnet M das nach V^* existierende reelle $M_p > 0$, so ergibt sich für jedes $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ und jedes $x \in I$ wegen (I.4.7)

$$(I.4.9) \quad \begin{aligned} |I_p^\kappa(\Gamma, f(x))| &= \left| \frac{\kappa!}{2\pi i} \left(\int_{(\Gamma)^p} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{\kappa+1}} - \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} \int_{(\partial n k_{\nu,\mu}^p)} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{\kappa+1}} \right) \right| \\ &\leq \frac{\kappa!}{2\pi} \left(\frac{ML}{\delta^{\kappa+1}} + \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} \frac{2\pi \varrho_{\nu,\mu}^p M}{(\varrho_{\nu,\mu}^{1,p} - \varrho_{\nu,\mu}^p)^{\kappa+1}} \right). \end{aligned}$$

Aus V_1 und (I.4.2) folgt aber

$$(I.4.10) \quad \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} \frac{\vartheta_{\nu, \mu}^p}{(\vartheta_{\nu, \mu}^{1,p} - \vartheta_{\nu, \mu}^p)^{\chi+1}} = \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} (\log |\log \vartheta_{\nu, \mu}^p|)^{\chi+1} \vartheta_{\nu, \mu}^p.$$

Um jetzt (I.4.10) zu präzisieren, seien für $\chi = 0, 1, 2, \dots$ die reellwertigen Funktionen der reellen Veränderlichen y

$$t_\chi(y) =_{\text{df}} (\log \log y)^{\chi+1} y^{-\frac{1}{2}}$$

im Intervall

$$J =_{\text{df}} \{ y \mid e^e \leq y < \infty \}$$

betrachtet. Dabei ergibt sich zunächst, daß

$$(I.4.11) \quad S_0 =_{\text{df}} \sup \{ t_0(y) \mid y \in J \} < \infty$$

und damit für jedes $\chi = 0, 1, 2, \dots$ und alle $y \in J$

$$(I.4.12) \quad 0 < t_\chi(y) = t_0(y) (\log \log y)^\chi \leq S_0 (\log \log y)^\chi$$

gilt. Ferner ergibt sich für jedes $y \in J$ und alle $\chi = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{d t_\chi(y)}{dy} = \frac{(\log \log y)^\chi}{y^{\frac{1}{2}} \log y} \left(\chi + 1 - \frac{1}{2} (\log y) (\log \log y) \right).$$

Hieraus folgt, daß für alle $\chi = 1, 2, 3, \dots$

$$(I.4.13) \quad \sup \{ t_\chi(y) \mid y \in J \} = \sup \{ t_\chi(y) \mid y \in J \wedge y \leq e^{4\chi} \}$$

gilt.

Da nun für jedes $\chi = 1, 2, 3, \dots$ $(\log \log y)^\chi$ in J eine monoton wachsende Funktion ist, ergibt sich aus (I.4.12) und (I.4.13) für $\chi = 1, 2, 3, \dots$

$$(I.4.14) \quad \sup \{ t_\chi(y) \mid y \in J \} \leq S_0 (\log 4\chi)^\chi.$$

Wegen (I.4.3) folgt jetzt aus (I.4.10), (I.4.14) und V_1 , daß für $\chi = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} \frac{\vartheta_{\nu, \mu}^p}{(\vartheta_{\nu, \mu}^{1,p} - \vartheta_{\nu, \mu}^p)^{\chi+1}} \leq S_0 R^* (\log 4\chi)^\chi$$

mit

$$0 < R^* = \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} (\vartheta_{\nu, \mu}^p)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

gilt. Damit ergibt sich aus (I.4.9) für $\chi = 1, 2, 3, \dots$

$$\left| I_p^{\mathbf{x}}(\Gamma, f(x)) \right| \leq \frac{\mathbf{x}!}{2\pi} \left(\frac{M L}{\delta^{\mathbf{x}+1}} + 5_0 R^2 \pi M (\log 4\mathbf{x})^{\mathbf{x}} \right).$$

Es existiert also wegen (I. 4. 7) eine natürliche Zahl $\mathbf{x}_0 = \mathbf{n}_1 \mathbf{x}_0(\delta)$, so daß

$$\left| I_p^{\mathbf{x}}(\Gamma, f(x)) \right| \leq B \mathbf{x}! (\log 4\mathbf{x})^{\mathbf{x}} \quad \text{für } \mathbf{x} \geq \mathbf{x}_0$$

mit

$$0 < B < \infty$$

gilt. Wird (I. 4. 8) beachtet, so ergibt sich also für $\mathbf{x} \geq \mathbf{x}_0$

$$(I. 4. 15) \quad \text{Supr} \left\{ \left| \frac{d^{\mathbf{x}} f(x)}{dx^{\mathbf{x}}} \right| \mid x \in I \right\} \leq B \mathbf{x}! (\log 4\mathbf{x})^{\mathbf{x}}$$

Da auch die Funktion $g(x) = 0$ für $x \in I$ der Bedingung (I. 4. 15) genügt und die Reihe

$$\sum_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}^{\infty} \frac{1}{(B \mathbf{x}! (\log 4\mathbf{x})^{\mathbf{x}})^{\frac{1}{\mathbf{x}}}} \geq \sum_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}^{\infty} \frac{1}{B^{\frac{1}{\mathbf{x}}} \mathbf{x} \log 4\mathbf{x}}$$

divergiert, folgt also aus dem Borel - Denjoy - Carlemanschen Ergebnis (0. 1)

$$f(x) = 0 \quad \text{für } x \in I$$

und damit aus der Definition von I, (I. 4. 4) und dem Satz 1 (I. 4. 2).

Also gilt der Satz 5.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung V'_q bzw. V_q in der in (I. 1) notierten Form nur zum Beweis des Satzes 5 benötigt wird. Wird die Voraussetzung V' durch $(q=1 \text{ oder } 2)$ "für ein $k \in \omega$ und ein $n \in \omega$ gilt

$\sum_{v \in n} \sum_{\mu \in \omega_v} |\log r_{v,\mu}|^{-\frac{k}{q}} < \infty$ " ersetzt, und sind die $\varrho_{v,\mu}^{q,p}$ so definiert, daß für alle $v \in \omega$ und $\mu \in \omega_v$ $\varrho_{v,\mu}^{q,p} \geq (|\log 2^{-p} r_{v,\mu}|^{\frac{k}{q}} + 2^{-p} r_{v,\mu})$ gilt und die Aussage des Satzes 5

besteht, so sind sämtliche Betrachtungen und Beweise dieser Arbeit unverändert für die sich unter diesen Voraussetzungen ergebenden Funktionsklassen gültig. Dies ist deshalb von Interesse, weil sich damit bzgl. dieser Funktionsklassen die gleichen Anwendungen und Ergebnisse zur Werteverteilungstheorie ergeben, wie sie in dieser Arbeit vermittels der Funktionen aus F_q erzielt werden. (Hierauf wird im folgenden nicht weiter hingewiesen.)

Funktionsklassen, auf die sich die voranstehende Bemerkung bezieht, sind z. B. die sich ergebenden, wenn $\log_1 x = \mathbf{n}_1 \log x$ und $\log_{\mathbf{x}} x = \mathbf{n}_1 \log \log_{\mathbf{x}-1} x$

gesetzt wird, für ein $k \in \omega$ und ein $n \in \omega$ $\sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\substack{\mu \in \omega \\ \mu \neq 2}}^k (\prod_{\chi=2}^k \log_{\chi} 2^{p_{r_{\nu, \mu}} - 1})^{-\frac{1}{q}} < \infty$
 und $\varphi_{\nu, \mu}^{q, p} = ((\prod_{\chi=2}^k \log_{\chi} 2^{p_{r_{\nu, \mu}} - 1})^{-\frac{1}{q}} + 2^{-p_{r_{\nu, \mu}}})$ gilt. Der Satz 5 kann in diesem
 Falle in gleicher Weise bewiesen werden, wie er vorangehend bewiesen wurde.

Eine weitere derartige Funktionsklasse ergibt sich, wenn für ein $k \in \omega$
 und ein $n \in \omega$ $\sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\substack{\mu \in \omega \\ \mu \neq 2}}^k (\prod_{\chi=2}^k \log_{\chi} 2^{p_{r_{\nu, \mu}} - 1})^{-\frac{1}{q}} < \infty$ gilt, $\varphi_{\nu, \mu}^{q, p} =$
 $((\prod_{\chi=2}^k \log_{\chi} 2^{p_{r_{\nu, \mu}} - 1})^{-\frac{1}{q}} + 2^{-p_{r_{\nu, \mu}}})$ gesetzt wird, und ein Punkt z_0 der sich in
 gleicher Weise wie in dieser Arbeit ergebenden $C_{q, p}$ genau dann in
 $C_{q, p}$ "erreichbar" ist, wenn für einen Punkt z_1 der komplexen Ebene
 $\{z \mid |z - z_1| \leq |z_0 - z_1|\} \subseteq C_{q, p}$ gilt. Die Aussage des Satzes 5 er-
 gibt sich dann ähnlich wie beim voranstehenden Beweis des Satzes 5 aus
 der eindeutigen Bestimmbarkeit analytischer Funktionen durch ihre
 asymptotischen Reihen (hierzu siehe z. B. [VI]).

Nach den vorangegangenen Hinweisen ~~folgt jetzt~~ wegen der Hilfssätze 5 und
 6 aus dem Satz 5 unmittelbar der Satz 6:

Satz 6: Sei $f(z) \in F_1$, z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 , und gelte
 $f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$). Dann gilt in jedem Punkt $z \in C_1$
 und jedem erreichbaren Punkt z von C $f(z) = 0$.

Die Sätze 5 und 6 lassen Kriterien darüber wünschenswert erscheinen,
 unter welchen Voraussetzungen ein Punkt z ein erreichbarer Punkt von
 C_1 ist. Hierauf wird in (II.3) noch etwas näher eingegangen. Ein der-
 artiges Kriterium steht jedoch mit dem Hilfssatz 5 schon hier zur
 Verfügung. Deshalb sei zum Abschluß dieses Abschnittes noch der aus
 dem Hilfssatz 5 und dem Satz 6 folgende Satz 7 angegeben, der sich
 auf die Funktionen aus F_2 bezieht:

Satz 7: Sei $f(z) \in F_2$, $z_0 \in C_2$ und gelte $f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$).
 Dann gilt in jedem Punkt $z \in C_2$, jedem Punkt $z \in C_1$ und in jedem
 erreichbaren Punkt z von C $f(z) = 0$.

5. Folgerungen aus der Eindeutigkeit der Funktionen $f(z) \in F_q$

Wie schon in der Einleitung angegeben wurde, werden nachstehend aus den Ergebnissen des 4. Abschnittes erste Folgerungen gezogen. Hierbei wird insbesondere gezeigt werden, inwieweit die Funktionsklassen F_q in dem in der Einleitung unter q_1 bzw. q_2 präzisierten Sinne quasi-analytisch sind.

Zunächst wird im Satz 8 gezeigt, daß die Funktionsklassen F_q im Sinne q_1 quasi-analytisch sind.

Satz 8: Sei $f(z) \in F_1$, γ ein im C zugrunde liegendem Gebiet G enthaltenes, nicht ausgeartetes Kurvenstück, und gelte $f(z) = 0$ für $z \in \{\zeta \mid \zeta \in \gamma \wedge \zeta \in C_1\}$. Dann gilt in jedem erreichbaren Punkt z von C $f(z) = 0$.

Beweis: Da γ nicht ausgeartet ist, existieren auf γ zwei voneinander verschiedene Punkte z' und z'' , deren nicht ausgeartete Verbindungsstrecke durch s bezeichnet sei. Vermittels der beim Beweis des Hilfssatzes 2 benutzten Methode kann dann auf s eine Folge in einem $C_{1,p}$ erreichbarer Punkte ζ_ν von C_1 ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) konstruiert werden, die auf s einen Häufungspunkt ζ_0 hat. Wegen (I. 2. 3) ergibt sich aber in der beim Beweis des Hilfssatzes 2 benutzten Weise, daß ζ_0 ein in $C_{1,p}$ erreichbarer Punkt ist. Werden also die Punkte ζ_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) orthogonal zu s auf γ projiziert, so ergibt sich auf γ eine Punktfolge z_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), die auf γ einen Häufungspunkt z_0 besitzt, wobei jeder dieser Punkte z_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) ein in $C_{1,p}$ erreichbarer Punkt ist. Damit aber ergibt sich wegen des Satzes 3 aus dem Satz 6 der Satz 8.

Mit dem Satz 8 gilt für die Funktionen aus F_q ein dem Spiegelungsprinzip der analytischen Funktionen entsprechendes Prinzip:

Satz 9: Sei $f(z) \in F_1$, s eine im C zugrunde liegenden Gebiet G enthaltene Strecke und gelte für jedes $p \in \omega$, jedes $z \in s \cap C_p$ unter der Bedingung $\zeta \in C_p \lim_{\zeta \rightarrow z} \operatorname{Im}(f(\zeta)) = 0$. Dann gilt für jeden erreichbaren Punkt z von C , dessen an s gespiegelter Punkt z_s ein erreichbarer Punkt von C ist, $f(z) = \overline{f(z_s)}$.

Beweis: Weil mit $f(z) \in F_1$ auch $\overline{f(z_s)} \in F_1$ und damit wegen des Satzes 2 $f(z) - \overline{f(z_s)} \in F_1$ gilt, folgt die Behauptung des Satzes 9 unmittelbar aus dem Satz 8.

Ähnlich, wie der Satz 9 aus dem Satz 8 folgt, ergibt sich aus dem Satz 6 der

Satz 10: Sei $f(z) \in F_1$, z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 und gelte $f^{(2\kappa)}(z_0) = 0$ bzw. $f^{(2\kappa+1)}(z_0) = 0$ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$). Dann gilt für jeden erreichbaren Punkt $z_0 + z$ von C , mit dem auch $z_0 - z$ ein erreichbarer Punkt von C ist, $f(z_0 + z) = -f(z_0 - z)$ bzw. $f(z_0 + z) = f(z_0 - z)$.

Beweis: Weil mit $f(z) \in F_1$ auch $f(z_0 + z) \in F_1$, $f(z_0 - z) \in F_1$ und wegen des Satzes 2 $f(z_0 + z) \pm f(z_0 - z) \in F_1$ gilt, folgt die Behauptung des Satzes 10 aus den Sätzen 3 und 6.

Um jetzt nachzuweisen, daß die Funktionsklassen F_q in dem in der Einleitung unter q_2 angegebenen Sinne quasi-analytisch sind und also einem dem Identitätssatz der analytischen Funktionen entsprechenden Satz genügen, folgt zunächst der

Satz 11: Sei $f(z) \in F_1$, z_0 ein in einer perfekten Teilmenge von $C_{1,p}$ enthaltener Punkt und gelte $f^{(\lambda)}(z_0) = 0$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, \kappa - 1$). Dann ist

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\kappa} & \text{für } z \in C_{1,p} \setminus \{z_0\} \\ \frac{1}{\kappa!} f^{(\kappa)}(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

in $C_{1,p}$ stetig.

Beweis: Zunächst ist $g(z)$ wegen (I. 1. 5) und des Satzes 1 in $C_{1,p} \setminus \{z_0\}$ stetig. Es bleibt also nur, die Stetigkeit von $g(z)$ in $C_{1,p}$ im Punkt z_0 zu zeigen.

Wegen $z_0 \in C_{1,p}$ existiert ein reelles $t > 0$, so daß der Kreis $K = \{z \mid |z - z_0| = t\}$ den Voraussetzungen des Satzes 3 bzgl. der Kurve Γ genügt. Infolge der Voraussetzung $f^{(\lambda)}(z_0) = 0$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, \kappa - 1$) folgt dann aus dem Satz 3

$$(I. 5. 1) \quad I_p^{(o)}(K, g(z)) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\kappa} & \text{für } z \in C_{1,p} \setminus \{z_0\} \\ \frac{1}{\kappa!} f^{(\kappa)}(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Ferner aber folgt wegen V^* und (I. 1. 3) in $C_{1,p} \setminus \{z_0\}$ auch
 $\lim_{z \rightarrow z_0} I_p^{(0)}(K, g(z)) = I_p^{(0)}(K, g(z_0))$, womit wegen (I. 5. 1) der Satz 11 vollständig bewiesen ist.

Wegen der Sätze 6 und 11 folgt jetzt leicht der dem Identitätssatz der analytischen Funktionen entsprechende und diesen Abschnitt beschließende

Satz 12: Sei $f(z) \in F_1$, z_0 ein in $C_{1,p}$ erreichbarer Punkt von C_1 , z_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) eine in $C_{1,p}$ enthaltene Punktfolge, z_0 Häufungspunkt der Folge z_ν und gelte $f(z_\nu) = 0$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$). Dann gilt in jedem Punkt $z \in C_1$ und jedem erreichbaren Punkt z von C $f(z) = 0$.

Beweis: Weil z_0 ein in $C_{1,p}$ erreichbarer Punkt ist, ist z_0 in einer perfekten Teilmenge von $C_{1,p}$ enthalten. Aus dem Satz 11 ergibt sich daher $f^{(\chi)}(z_0) = 0$ ($\chi = 0, 1, 2, \dots$). Damit aber folgt aus dem Satz 6 der Satz 12.

6. Die Singularität der Funktionen $f(z) \in F_q$

Infolge des Satzes 2 ist jede regulär analytische Funktion eine Funktion aus F_q ($q = 1, 2$). Deshalb soll in diesem Abschnitt zum Abschluß des Teils I im Satz 12 gezeigt werden, daß jede Funktion aus F_q entweder in jeder Umgebung eines Punktes z_0 aus dem C zugrunde liegenden Gebiet G im Sinne des Satzes von Casorati-Weierstraß wesentlich singulär oder aber in einer Umgebung des Punktes z_0 regulär analytisch ist.

Es sei hier bemerkt, daß die sphärische Entfernung irgend zweier Punkte z_1 und z_2 der kompaktifizierten z -Ebene durch $[z_1, z_2]$ bezeichnet wird.

Satz 13: Sei $f(z) \in F_q$, z_0 ein Punkt des C zugrunde liegenden Gebietes G und z^* irgendein Punkt der kompaktifizierten z -Ebene. Gilt dann für ein reelles $t > 0$ mit $s = \inf \{z \mid |z - z_0| < t\} \subseteq G$

$$(I. 6. 1) \quad \inf \{[f(z), z^*] \mid z \in s \cap C\} = \delta > 0,$$

so existiert eine in einer Umgebung D von z_0 regulär analytische Funktion $w(z)$ mit $w(z) = f(z)$ für $z \in C_1 \cap D$.

Beweis: Sei

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z^* = \infty \\ (f(z) - z^*)^{-1} & \text{für } |z^*| < \infty \end{cases}$$

Wegen (I. 6. 1) existiert dann ein reelles M mit $0 < M < \infty$ und

$$(I. 6. 2) \quad |g(z)| \leq M \quad \text{für } z \in S \cap C.$$

Weiterhin ergibt sich aus dem Hilfssatz 2 sofort, daß ein $p_0 \in \omega$ und eine rektifizierbare Kurve Γ existieren, so daß Γ das einfach zusammenhängende Gebiet D berandet, $z_0 \in D$, $D^- \subseteq S$ und

$$(I. 6. 3) \quad \Gamma \subset (S)^p \quad \text{für } p \geq p_0$$

gilt.

Nach diesen den Beweis einleitenden Bemerkungen wird jetzt gezeigt, daß für jedes $p \in \omega$ mit $p \geq p_0$

$$(I. 6. 4) \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{v \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_v} \int_{(D_n K_{v,\mu}^p)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \quad \text{für } z \in (D)^{1,p}$$

gilt. Da dies im Falle $z^* = \infty$ aus der Definition von $g(z)$ und der Konstruktion von Γ aufgrund des Satzes 3 gilt, ist (I. 6. 4) nur für den Fall $|z^*| < \infty$ zu beweisen.

Sei also $|z^*| < \infty$, $p \in \omega$, z_0 ein Punkt von $(D)^p$ und gelte $p \geq p_0$.

Wegen der Definition von $g(z)$, (I. 6. 1) und des Satzes 1 ergibt sich nun offensichtlich, daß $g(z)$ in C_p stetig ist, woraus die Existenz sämtlicher Integrale in (I. 6. 4) folgt. Weiterhin folgt wegen $f(z) \in F_q$ unter Beibehaltung der Bezeichnungen im 1. Abschnitt wegen (I. 6. 1) die Existenz eines reellen $\mathfrak{J} > 0$ und eines $N \in \omega$, so daß

$$\left| -z^* + \sum_{v=1}^n w_v(z) \right| > \mathfrak{J} \quad \text{für } n \in \omega, \quad n \geq N \quad \text{und } z \in G_n = \bigcup_{\substack{v \in \omega, \mu \in \omega_v, \\ v \leq n}} (D \setminus U(U S_{v,\mu}^p))$$

gilt. Ist also für jedes

$$w_n^*(z) = \left(-z^* + \sum_{v=1}^{N+n} w_v(z) \right)^{-1} \quad \text{für } z \in G_{N+n},$$

so ist $w^*(z)$ in $G_{N+\lambda}$ regulär analytisch. Damit aber ergibt sich analog wie beim Beweis des Satzes 3 (I. 6. 4) auch im Falle $|z^*| < \infty$.

Wird in (I. 6. 4) der Grenzübergang $p \rightarrow \infty$ ausgeführt, so ergibt sich wegen (I. 6. 2) und (I. 6. 3) infolge der Konstruktion von $(D)^{1,p}$ und der $K_{\nu,\mu}^p$ für jedes $z \in (D)^{1,p}$ mit $p \geq p_0$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Die Funktionswerte von $g(z)$ sind also in jedem Punkt $z \in C_1 \cap D$ die Funktionswerte einer in D regulär analytischen Funktion. Infolge der Definition von $g(z)$ sind daher auch die Funktionswerte von $f(z)$ in jedem Punkt $z \in C_1 \cap D$ die Funktionswerte einer in D analytischen Funktion.

Damit aber ist der Satz 13 bewiesen.

Im Hinblick auf den Satz 13 sei zum Abschluß dieses Abschnittes noch folgende, sich unmittelbar aus der Definition der Funktionen $f(z) \in F_q$ und V^* ergebende Bemerkung aufgeführt:

Zu jeder Funktion $f(z) \in F_q$ und jedem $p \in \omega$ existiert ein reelles M_p mit $0 \leq M_p < \infty$ und

$$(I. 6. 5) \quad |f(z)| \leq M_p \quad \text{für } z \in C_p.$$

Teil II

Anwendungen auf die Funktionstheorie

1. Nichtanalytische Funktionen $f(z) \in F_q$

In diesem, den Teil II einleitenden Abschnitt wird die Existenz nichtanalytischer und nichtmeromorpher Funktionen $f(z) \in F_q$ nachgewiesen.

Daß jede analytische Funktion $w(z)$ in F_q enthalten ist, wurde schon im Teil I mehrfach angeführt und ergab sich unmittelbar aus der Abgrenzung der Funktionsklassen F_q (Satz 2). Ebenso einfach ergibt sich, daß die meromorphen Funktionen in F_q enthalten sind;

Satz 14: Sei G ein Gebiet der z -Ebene und $w(z)$ eine in G^- meromorphe Funktion. Dann gilt $w(z) \in F_q$ ($q = 1, 2$).

Beweis: Weil $w(z)$ in G^- meromorph ist, besitzt $w(z)$ in G^- höchstens endlich viele Pole $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. Sei nun b irgendein Punkt aus G^- . Wird dann

$$\omega_\nu = \begin{cases} \{\chi \mid \chi \in \omega \wedge \chi \leq n\} & \text{für } \nu = 1 \\ \{1\} & \text{für } \nu = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$a_{\nu, \mu} = \begin{cases} b_\mu & \text{für } \nu = 1 \text{ und } \mu \in \omega_1 \\ b & \text{für } \nu = 2, 3, 4, \dots \text{ und } \mu \in \omega_\nu \end{cases}$$

$$r_{\nu, \mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = 1 \text{ und } \mu \in \omega_1 \\ e^{-e^{\nu \mu}} & \text{für } \nu = 2, 3, 4, \dots \text{ und } \mu \in \omega_\nu \end{cases}$$

und

$$w_\nu(z) = \begin{cases} w(z) & \text{für } \nu = 1 \\ 0 & \text{für } \nu = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

gesetzt, so ergibt sich aus der Definition der Funktionsklassen F_q direkt der Satz 14.

Der Beweis des Satzes 14 läßt nun erkennen, wie sich die Existenz nichtanalytischer und nichtmeromorpher Funktionen $f(z) \in F_q$ ergibt. Um die Konstruktion derartiger Funktionen übersichtlicher zu gestalten, sei zunächst der folgende einfache Satz aufgeführt:

Satz 15: Sei G ein Gebiet der z -Ebene, jedem $\nu \in \omega$ ein Anfang ω_ν von ω und eine Funktion $w_\nu(z) = \sum_{\mu \in \omega_\nu} A_{\nu,\mu} (z - a_{\nu,\mu})^{-\mu}$ zugeordnet, und sei jede Funktion $w_\nu(z)$ in G^- mit Ausnahme höchstens endlich vieler Punkte von G^- regulär analytisch. Gilt dann für jedes $p \in \omega$

$$(II. 1. 1) \quad \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} 2^{p\mu} |A_{\nu,\mu}|^{\frac{1}{\mu+1}} < \infty$$

und für $q = 1$ bzw. $q = 2$

$$(II. 1. 2) \quad \sum_{\nu \in \omega} \sum_{\mu \in \omega_\nu} (\log |\log \min \{ e^{-e}, |A_{\nu,\mu}|^{\frac{1}{\mu+1}} \}|)^{-\frac{1}{q}} < \infty$$

so gilt

$$f(z) = \sum_{\nu \in \omega} w_\nu(z) \in F_q.$$

Beweis: Sei für jedes $\nu \in \omega$

$$(II. 1. 3) \quad r_{\nu,\mu} = \inf_{\mu \in \omega_\nu} |A_{\nu,\mu}|^{\frac{1}{\mu+1}} \quad \text{für } \mu \in \omega_\nu.$$

Dann ist für jedes $\nu \in \omega$ $w_\nu(z)$ eine in $G^- \setminus \bigcup_{\mu \in \omega_\nu} \{a_{\nu,\mu}\}$ analytische Funktion, und es gilt wegen (II. 1. 1), (II. 1. 2) und (II. 1. 3) V_0 und V_q^* bzw. V_q . Ferner ergibt sich für jedes $p \in \omega$ und jedes

$$G_{\nu,p} = \inf_{\mu \in \omega_\nu} \{ z \mid |z - a_{\nu,\mu}| < 2^{-p} r_{\nu,\mu} \} \quad \text{wegen (II. 1. 1) und (II. 1. 3)}$$

$$M_{\nu,p} = \sup \{ |w_\nu(z)| \mid z \in G_{\nu,p} \} \leq 2^p \sum_{\mu \in \omega_\nu} 2^{p\mu} |A_{\nu,\mu}| < \infty$$

und

$$\sum_{\nu \in \omega} M_{\nu,p} < \infty.$$

Also gilt auch V^* und damit der Satz 15.

Bemerkung: 1. gilt $\sup \{ \mu \mid \mu \in \omega_\nu, \nu \in \omega \} < \infty$, so folgt die Voraussetzung (II. 1. 1) des Satzes 15 offensichtlich aus der Voraussetzung (II. 1. 2)

2. Anhand des Beweises zum Satz 15 ist zu erkennen, daß sich auch leicht Kriterien dafür angeben lassen, daß $f(z) = \sum_{\nu \in \omega} w_\nu(z) \in F_q$ gilt, wobei jedes $w_\nu(z)$ eine rationale Funktion oder aber Produkt einer rationalen und einer in G^- analytischen Funktion ist,

Vermittels des Satzes 15 werden jetzt Funktionen $f(z) \in F_q$ mit dem Definitionsbereich C konstruiert, die in keiner Umgebung eines beliebigen Punktes z_0 des C zugrunde liegenden Gebietes G als analytische bzw. meromorphe Funktionen betrachtet werden können.

Zu diesem Zweck bezeichne G irgendein Gebiet der z -Ebene, und sei

$$1) \quad \omega_\nu = \varnothing \quad \{1\} \quad \text{für jedes } \nu \in \omega$$

$$2) \quad A_{\nu,1} \quad \text{eine Folge reeller Zahlen} \\ \text{mit } 0 < A_{\nu,1} \leq e^{-e^{(\nu+1)^q \log^{2q}(\nu+1)}} \quad (q = 1 \text{ oder } q = 2)$$

$$3) \quad \{a_{\nu,1} \mid \nu \in \omega\} \quad \text{eine abzählbare, in } G \text{ dichte Punktmenge}$$

und

$$4) \quad w_\nu(z) = \varnothing A_{\nu,1} (z - a_{\nu,1})^{-1} \quad \text{für jedes } z \in G \setminus \{a_{\nu,1}\}$$

Diese Funktionen $w_\nu(z)$ erfüllen in G die Voraussetzungen des Satzes 15 für $q=1, 2$. Daher gilt für jede derartige Funktion, deren Definitionsbereich C das Gebiet G zugrunde liegt,

$$f(z) = \varnothing \sum_{\nu \in \omega} w_\nu(z) \in F_q.$$

Sei nun z_0 ein Punkt aus G . Dann existiert keine Umgebung $U \subset G$ von z_0 , so daß bzgl. einer in U analytischen Funktion $w(z)$ eine der folgenden Aussagen gilt:

$$a) \quad \text{es existiert eine nicht ausgeartete Kurve } \gamma \subset U \text{ mit} \\ f(z) = w(z) \quad \text{für } z \in \gamma \cap C.$$

oder

$$b) \quad \text{es existieren ein erreichbarer Punkt } z \in U \text{ von } C_1 \text{ und eine} \\ \text{für ein } p \in \omega \text{ in } (U)^{1,p} \text{ enthaltene Punktfolge } z_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots) \\ \text{mit dem Häufungspunkt } z \text{ und } f(z_\nu) = w(z_\nu) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

oder

$$c) \quad \text{es existiert ein erreichbarer Punkt } z \in U \text{ von } C_1 \text{ mit} \\ f^{(\lambda)}(z) = w^{(\lambda)}(z) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots).$$

Um dies zu beweisen, sei angenommen, es gälte a) bzw. b) bzw. c). Unter dieser Annahme folgt aus dem Satz 8 bzw. 12 bzw. 6 in Verbindung mit dem Satz 2, daß

$$(II.1.4) \quad f(z) = w(z) \quad \text{für } z \in C_1 \cap U$$

gilt. Weiterhin ergibt sich aus dem Hilfssatz 2 leicht, daß ein $p^* \in \omega$ und eine rektifizierbare Kurve Γ existieren, so daß Γ das einfach zusammenhängende Gebiet D berandet, $z_0 \in D$, $D^- \subset U$ und $\Gamma \subset (U)^{1,p^*}$ gilt.

Wegen 3) ist ferner die Punktmenge $A =_{\text{def}} \{a_{\nu,1} \mid a_{\nu,1} \in D \wedge \nu \in \omega\}$ nicht leer.

Aus (II.1.4) ergibt sich jetzt wegen $f(z) \in F_q$ analog zum Beweis des Satzes 3

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} f(z) \, dz \\ &= \sum_{\nu \in \omega} \int_{\Gamma} w_{\nu}(z) \, dz \\ &= \sum_{\nu \in \omega} A_{\nu,1} \int_{\Gamma} (z - a_{\nu,1})^{-1} \, dz, \end{aligned}$$

woraus bekanntlich mit $\omega^* =_{\text{def}} \{\nu \mid \nu \in \omega \wedge a_{\nu,1} \in A\}$

$$0 = \sum_{\nu \in \omega^*} A_{\nu,1}$$

folgt, was wegen $A \neq \emptyset$ im Widerspruch zu 2) steht.

Damit ist jetzt gezeigt, daß die Funktionsklassen F_q eine echte Erweiterung der Klasse der regulär analytischen und meromorphen Funktionen sind, womit das Ziel dieses Abschnittes erreicht ist.

2. Eine Bemerkung zur Fortsetzbarkeit der Funktionen $f(z) \in F_q$ und der analytischen Funktionen

Infolge der Eindeutigkeit der Funktionen aus F_q stellt sich in Analogie zur analytischen Fortsetzung die Frage nach der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Funktionen aus F_q :

Sei $f(z) \in F_q$ mit dem Definitionsbereich C . Existiert dann eine Funktion $f_1(z) \in F_q$ mit dem Definitionsbereich C^1 und $C \cap C^1 \neq \emptyset$, $C^1 \setminus C \neq \emptyset$ sowie $f(z) = f_1(z)$ für $z \in C \cap C^1$?

Insbesondere erhebt sich die Frage der Fortsetzung "nach innen", d. h. auf $G \setminus C$, wobei G das C zugrunde liegende Gebiet ist.

Ebenso, wie in der Funktionstheorie z. B. das Spiegelungsprinzip einen Beitrag zur analytischen Fortsetzung darstellt, bedeutet das im Satz 9 formulierte Spiegelungsprinzip einen ersten Beitrag zum Problem der Fortsetzung der Funktionen aus F_q . Einen gewissen Beitrag zur Fortsetzung "nach innen" liefert z. B. der Satz 13.

Auf die Frage der Fortsetzbarkeit der Funktionen aus F_q soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

Eine weitere Frage, die sich aus der Eindeutigkeit der Funktionen aus F_q und der Zugehörigkeit der analytischen Funktionen zu den Funktionsklassen F_q ergibt, ist folgende:

Seien G_1 und G_2 zwei disjunkte Gebiete der z -Ebene, $w_1(z)$ bzw. $w_2(z)$ eine in G_1 bzw. G_2 analytische Funktion und sei $w_i(z)$ ($i = 1, 2$) nicht über G_i hinaus analytisch fortsetzbar. Inwiefern ist dann $w_2(z)$ durch $w_1(z)$ eindeutig bestimmt?

Wie in der Einleitung bereits bemerkt wurde, wurde diese Frage mittels quasi-analytischer Funktionen in der Literatur schon behandelt. In diesem Zusammenhang sind insbesondere die Arbeiten von E. Borel (siehe z. B. [II] und [III]) und G. Julia zu erwähnen (siehe z. B. [IX]). Zur Beantwortung dieser Frage kann insbesondere die Quasi-analytizität im Sinne von q_1 dienen.

Ebenfalls in der Einleitung wurde aber auch darauf verwiesen, daß für gewisse, recht spezielle Funktionsklassen die zuletzt angeführte Frage unter Voraussetzungen positiv beantwortet werden kann, die die Behandlung dieser Frage mittels der Funktionsklassen F_q nicht zulassen. So bewies z. B. schon E. Borel den folgenden

Satz A: Seien r_1 und r_2 zwei reelle Zahlen mit $0 < r_1 \leq r_2 < \infty$, $m \in \omega$ und a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) eine Punktfolge der z -Ebene mit

$r_1 \leq |a_\nu| \leq r_2$ ³⁾. Sei ferner A_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) eine Folge komplexer Zahlen und gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2r_1}{r_1} \right)^n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_\nu| \right\} = 0.$$

Dann ist

$$(II. 2. 1) \quad w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z - a_n)^{-m}$$

in $|z| < r_1$ und $|z| > r_2$ analytisch und in $|z| > r_2$ identisch Null, sofern $w(z)$ in $|z| < r_1$ identisch verschwindet.

Da dieses Ergebnis auch im Hinblick auf die Funktionsklassen F_q nicht uninteressant ist, wird im folgenden gezeigt, daß mit einer Modifikation des von Borel gegebenen Beweises der zitierte Satz A von Borel sich bzgl. der Funktionen (II. 2. 1) ohne andere gravierendere Voraussetzungen leicht verallgemeinern läßt.

Satz 16: Seien r_1 und r_2 zwei reelle Zahlen mit $0 < r_1 \leq r_2 < \infty$, $m \in \omega$ und a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) eine Punktfolge der z -Ebene mit $r_1 \leq |a_\nu| \leq r_2$ ³⁾. Sei ferner A_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) eine Folge komplexer Zahlen, gelte

$$(II. 2. 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (6 \max \{ r_1^{-2}, r_1^{-1} r_2 \})^{n \cdot m} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_\nu| \right\} = 0$$

und sei m_ν eine Folge natürlicher Zahlen mit $m_\nu \leq m$. Dann ist

$$(II. 2. 3) \quad w(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (z - a_\nu)^{-m_\nu}$$

in $|z| < r_1$ und $|z| > r_2$ analytisch und in $|z| > r_2$ identisch Null, sofern $w(z)$ in $|z| < r_1$ identisch verschwindet.

³⁾ Man ersieht anhand der weiteren Voraussetzungen und des Beweises des Satzes leicht, daß diese Voraussetzung vermittels konformer Abbildung der kompaktifizierten z -Ebene allgemeiner gefaßt werden kann.

Beweis: Aus (II. 2. 2) und (II. 2. 3) folgt sofort, daß $w(z)$ in $|z| < r_1$ und $|z| > r_2$ analytisch ist.

Ist $w(z)$ in $|z| < r_1$ identisch Null, so gilt

$$(II. 2. 4) \quad w^{(\lambda)}(0) = 0 \quad \text{für } \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

Sei nun z_1 ein beliebiger Punkt der z -Ebene mit

$$2r_2 \leq |z_1| \leq 3r_2, \quad \zeta = \frac{z z_1}{z - z_1}, \quad G_1 = \{z \mid |z| < \frac{1}{2}r_1\}, \\ G_2 = \{z \mid |z| > 2r_2\}, \quad \text{und sei für jedes } \nu \in \omega \quad b_\nu = \frac{a_\nu z_1}{z_1 - a_\nu} \quad \text{und} \\ B_\nu = A_\nu (z_1 - a_\nu)^{m_\nu}. \quad \text{Dann gilt}$$

$$(II. 2. 5) \quad \frac{1}{2}r_1 \leq |b_\nu| \leq 3r_2 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

Ferner ergibt sich mit den eingeführten Bezeichnungen wegen (II. 2. 2),

(II. 2. 3) und (II. 2. 4), daß

$$(II. 2. 6) \quad g(\zeta) = w\left(\frac{\zeta z_1}{\zeta + z_1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ B_\nu \sum_{\mu=0}^{m_\nu} \binom{m_\nu}{\mu} \left(\frac{b_\nu + z_1}{\zeta - b_\nu}\right)^\mu \right\}$$

in G_1 und G_2 eine analytische Funktion ist und

$$g^{(\lambda)}(0) = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots)$$

gilt. Wegen (II. 2. 2), (II. 2. 3) und (II. 2. 6) folgt damit für jedes n

$$(II. 2. 7) \quad \sum_{\nu=1}^n \left\{ B_\nu \sum_{\mu=0}^{m_\nu} \binom{m_\nu}{\mu} \left(\frac{b_\nu + z_1}{-b_\nu}\right)^\mu \right\} = \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \left\{ B_\nu \sum_{\mu=0}^{m_\nu} \binom{m_\nu}{\mu} \left(\frac{b_\nu + z_1}{-b_\nu}\right)^\mu \right\}$$

und für $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

$$(II. 2. 8) \quad \sum_{\nu=1}^n \left\{ B_\nu \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \binom{m_\nu}{\mu} (b_\nu + z_1)^\mu (-b_\nu)^{-(\mu+\lambda)} \frac{(\mu + \lambda - 1)!}{\lambda! (\mu - 1)!} \right\} \\ = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left\{ B_\nu \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \binom{m_\nu}{\mu} (b_\nu + z_1)^\mu (-b_\nu)^{-(\mu+\lambda)} \frac{(\mu + \lambda - 1)!}{\lambda! (\mu - 1)!} \right\}.$$

Da nun wegen der eingeführten Bezeichnungen und (II. 2. 5)

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left\{ B_{\nu} \sum_{\mu=0}^{m_{\nu}} \binom{m_{\nu}}{\mu} \left(\frac{b_{\nu} + z_1}{-b_{\nu}} \right)^{\mu} \right\} \right| \leq R_{0,n} = \left(\frac{1}{r_2} + \frac{12}{r_1} \right)^m \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_{\nu}|$$

und

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left\{ B_{\nu} \sum_{\mu=1}^{m_{\nu}} \binom{m_{\nu}}{\mu} (b_{\nu} + z_1)^{\mu} (-b_{\nu})^{-(\mu+\chi)} \frac{(\mu + \chi - 1)!}{\chi! (\mu - 1)!} \right\} \right| \leq R_{\chi,n} = \left(\frac{2}{r_1} \right)^{\chi} \left[(m+1) \left(\frac{1}{r_2} + \frac{12}{r_1} \right) \right]^m \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_{\nu}|$$

gilt, existiert wegen (II. 2. 7) und (II. 2. 8) zu jedem $n \in \omega$ und $\chi = 0, 1, 2, \dots$, ein $\Theta_{\chi,n}$ mit $|\Theta_{\chi,n}| \leq 1$ und

$$(II. 2. 9) \quad \sum_{\nu=1}^n \left\{ B_{\nu} \sum_{\mu=0}^{m_{\nu}} \binom{m_{\nu}}{\mu} \left(\frac{b_{\nu} + z_1}{-b_{\nu}} \right)^{\mu} \right\} = \Theta_{0,n} R_{0,n}$$

bzw. für $\chi = 1, 2, \dots, n$

$$(II. 2. 10) \quad \sum_{\nu=1}^n \left\{ B_{\nu} \sum_{\mu=1}^{m_{\nu}} \binom{m_{\nu}}{\mu} (b_{\nu} + z_1)^{\mu} (-b_{\nu})^{-(\mu+\chi)} \frac{(\mu + \chi - 1)!}{\chi! (\mu - 1)!} \right\} = \Theta_{\chi,n} R_{\chi,n}.$$

Nachdem die vorangegangenen Vorbereitungen zum Beweis des Satzes 16 getroffen sind, sei jetzt für jedes $n \in \omega$ und $i = 0, 1, 2, \dots$

$$p_{i,n}(z) = z^i \prod_{\nu=1}^n (z + b_{\nu})^{m_{\nu}} = z^i \sum_{\mu=0}^{n \cdot m} u_{\mu} z^{\mu}.$$

Dann gilt für $\nu = 1, 2, \dots, n$ und jedes $i = 0, 1, 2, \dots$

$$(II. 2. 11) \quad p_{i,n}^{(\chi)}(-b_{\nu}) = 0 \quad (\chi = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

und wegen (II. 2. 5)

$$(II. 2. 12) \quad \left(\frac{1}{2} r_1 \right)^{m \cdot n} \leq |u_0| = \left| \prod_{\nu=1}^n (b_{\nu})^{m_{\nu}} \right| \leq (3 r_2)^{m \cdot n}.$$

Wegen (II. 2. 9), (II. 2. 10) und (II. 2. 11) ergibt sich aber

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi=0}^{n \cdot m} u_{\chi} \Theta_{\chi,n} R_{\chi,n} = \\ &= u_0 \sum_{\nu=1}^n \left\{ B_{\nu} \sum_{\mu=0}^{m_{\nu}} \binom{m_{\nu}}{\mu} \left(\frac{b_{\nu} + z_1}{-b_{\nu}} \right)^{\mu} \right\} + \sum_{\chi=1}^{n \cdot m} \left[u_{\chi} \sum_{\nu=1}^n \left\{ B_{\nu} \sum_{\mu=1}^{m_{\nu}} \binom{m_{\nu}}{\mu} \frac{(b_{\nu} + z_1)^{\mu}}{(-b_{\nu})^{\mu+\chi}} \frac{(\mu + \chi - 1)!}{\chi! (\mu - 1)!} \right\} \right] \\ &= u_0 \sum_{\nu=1}^n B_{\nu} + \sum_{\nu=1}^n \left\{ B_{\nu} \sum_{\mu=1}^{m_{\nu}} \binom{m_{\nu}}{\mu} \frac{(b_{\nu} + z_1)^{\mu}}{(\mu-1)!} (-b_{\nu})^{\mu} p_{\mu-1,n}^{(\mu-1)}(-b_{\nu}) \right\} \\ &= u_0 \sum_{\nu=1}^n B_{\nu} \end{aligned}$$

d. h.

$$(II. 2. 13) \quad \sum_{\kappa=0}^{n \cdot m} u_{\kappa} \Theta_{\kappa, n} R_{\kappa, n} = u_0 \sum_{\nu=1}^n B_{\nu} \quad .$$

Andererseits ergibt sich wegen $|\Theta_{\kappa, n}| \leq 1$ infolge der Definition der $R_{\kappa, n}$ mit $d = \frac{1}{r_2} \left[(m+1) \left(\frac{1}{r_2} + \frac{12}{r_1} \right) \right]^m$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\kappa=0}^{n \cdot m} u_{\kappa} \Theta_{\kappa, n} R_{\kappa, n} \right| &\leq \sum_{\kappa=0}^{n \cdot m} |u_{\kappa}| R_{\kappa, n} \\ &= \left(\frac{2}{r_1} + 3r_2 \right)^{n \cdot m} d \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_{\nu}| \quad . \end{aligned}$$

Es folgt also aus (II. 2. 12) und (II. 2. 13)

$$\left| \sum_{\nu=1}^n B_{\nu} \right| \leq \left[\frac{2}{r_1} \left(\frac{2}{r_1} + 3r_2 \right) \right]^{n \cdot m} d \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |A_{\nu}| \quad ,$$

woraus sich wegen (II. 2. 2) infolge der Definition der B_{ν}

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} (z_1 - a_{\nu})^{-m_{\nu}} = 0$$

ergibt. Da aber z_1 ein beliebiger Punkt der z -Ebene mit $2r_2 \leq |z_1| \leq 3r_2$ war, ist damit wegen (II. 2. 3) der Satz 16 bewiesen.

Bemerkungen über erreichbare Punkte von C_1

Schon im Teil I dieser Arbeit wurde der in (I. 2) eingeführte Begriff des "erreichbaren Punktes von C_1 " wesentlich benötigt. Insbesondere aber im Hinblick auf die Betrachtungen der folgenden Abschnitte 4 und 5 sind Aussagen darüber von wesentlichem Interesse, wann ein Punkt z ein erreichbarer Punkt eines gegebenen C_1 ist. Einige derartige Aussagen zu ermöglichen, ist das Ziel des vorliegenden Abschnittes.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, wurde z. B. insbesondere die Funktionsklasse F_2 deshalb eingeführt, weil jeder Punkt aus C_2 ein erreichbarer Punkt von C_1 ist. Dadurch war es möglich, den Eindeutig-

keitssatz (Satz 5 bzw. 6) für die Funktionen aus F_2 die leichter übersehbare, im Satz 7 formulierte Fassung zu geben. Das entsprechende ist für die Funktionen aus F_2 auch bzgl. der Sätze 10 und 12 möglich, wurde jedoch nicht besonders vermerkt, weil dies offensichtlich ist.

Die vorangehende Bemerkung ist durch den Hilfssatz 5 möglich. In gleicher Weise, wie sich dieser Hilfssatz ergab, folgt auch der

Hilfssatz 7: Seien C_1 und ein Punkt $z_0 \in C_1$ gegeben. Existiere ferner ein reelles $\alpha > 0$, so daß mit

$$A = \{ a_{\nu, \mu} \mid |z_0 - a_{\nu, \mu}| \leq \alpha \}$$

für ein $p \in \omega$

$$\sum_{\nu \in \omega} \sum_{\substack{\mu \in \omega, \\ a_{\nu, \mu} \in A}} |z_0 - a_{\nu, \mu}|^{-1} < \infty$$

gilt. Dann ist z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 .

Wie der Beweis des Hilfssatzes 5 modifiziert werden muß, um den Hilfssatz 7 zu beweisen, geht aus dem Beweis des Hilfssatzes 5 unmittelbar hervor.

Ein weiteres Kriterium dafür, wann ein Punkt $z_0 \in C_1$ als erreichbarer Punkt von C_1 angesehen werden kann, ergibt sich folgendermaßen:

Seien ein $C_1 = \bigcup_{p \in \omega} C_{1,p}$ mit dem C_1 zugrunde liegenden Gebiet G und eine Abbildung $w(z)$ gegeben. Bilde ferner $w(z)$ ein G umfassendes Gebiet schlicht ab. Dann geht bekanntlich G in ein Gebiet G_w über, und existiert ein reelles M mit $0 < M < \infty$, so daß

$$\left| \frac{dw(z)}{dz} \right| \leq M \quad \text{für } z \in G$$

gilt.

Damit nun ergibt sich aus dem Weierstraßschen Mittelwertsatz der Funktionentheorie in einfacher Weise, daß C_1 unter der schlichten Abbildung $w(z)$ in ein C_1^* und jedes $C_{1,p}$ in $C_{1,p}^*$ von C_1^* übergeht.

Aus der skizzierten Betrachtung folgt nun die insbesondere im Hinblick auf die Ergebnisse in (II. 4) und (II. 5) interessante

Bemerkung: Sei in $C_{1,p}$ ein Punkt z_0 gegeben, und sei z_0 innerer Punkt eines analytischen Kurvenstückes $\gamma \subseteq C_{1,p}$. Dann kann bzgl. aller Ergebnisse der vorliegenden Arbeit z_0 als in $C_{1,p}$ erreichbarer Punkt von C_1 angesehen werden.

Aus dem Beweis des Hilfssatzes 2 ergibt sich nun noch sofort der

Hilfssatz 8: Seien C_1 mit dem ihm zugrunde liegenden Gebiet G , ein Punkt $z_0 \in G$ und eine Gerade g durch z_0 gegeben. Existiere ferner ein reelles $\alpha > 0$, und sei mit $A =_{\text{def}} \{a_{\nu,\mu} \mid |z_0 - a_{\nu,\mu}| \leq \alpha\}$ für jedes $p \in \omega$ g_p^* die zu g orthogonale Projektion der Punktmenge $U(U S_{\nu,\mu}^{1,p})$ auf g . Gilt dann für ein $p_0 \in \omega$ $z_0 \notin g_{p_0}^*$, so ist z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 .

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, daß der Hilfssatz 8 infolge der Bemerkung 1 sich folgendermaßen leicht verallgemeinern läßt:

Man ersetze im Hilfssatz 8 die zu g orthogonale Projektion durch eine Projektion "parallel" zu einer g geeignet schneidenden analytischen Kurve.

4. Beziehungen zur Theorie der Ausfüllungskreise

Die Abgrenzung der Funktionsklassen F_q und die Betrachtungen in (II. 1) lassen vermuten, daß vermittels der Funktionen aus F_q Ergebnisse erzielt werden können, die die Theorie der Ausfüllungskreise gewisser Klassen meromorpher Funktionen betreffen. Derartige Aussagen werden in diesem und dem folgenden Abschnitt 5 behandelt.

Zunächst wird die Klasse F_q^1 derjenigen Funktionen angegeben, die in diesem Abschnitt 4 betrachtet werden:

Erklärung: Sei $f(z) \in F_q$, C der Definitionsbereich von $f(z)$, η_Q die Menge der Häufungspunkte der Punktmenge $Q =_{\text{def}} U(U \{a_{\nu,\mu}\})$, η_Q^2 die Menge der Häufungspunkte von η_Q , sei η_Q^2 im C zugrunde liegenden Gebiet G enthalten, und gelte

$$(II.4.1) \quad \eta^2 Q = \emptyset$$

oder im Falle $\eta^2 Q \neq \emptyset$

(II.4.2) die Punkte aus $\eta^2 Q$ sind isoliert.

Dann gilt $f(z) \in F_q^1$.

Aus der vorangehenden Erklärung ergibt sich (z. B. vermittels des Satzes 3) sofort, daß jedes $f(z) \in F_q^1$ in $G \setminus Q^-$ regulär analytisch ist. Deshalb werden die Funktionen aus F_q^1 im folgenden der Deutlichkeit halber durch $w(z)$ bezeichnet.

Vermittels des Satzes 12 folgt nun ganz elementar der

Satz 17a: Sei $w(z) \in F_q^1$, $w(z)$ nicht konstant, a ein Punkt der z -Ebene und z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 . Dann existieren zu jedem $p \in \omega$ höchstens endlich viele Punkte $z_\nu \in C_{1,p}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots, n$) mit $f(z_\nu) = a$.

Beweis: Wegen $w(z) \in F_q^1$ und des Satzes 2 gilt auch $w(z) - a \in F_q^1$. Wäre nun die Behauptung des Satzes 17a falsch, so wären die Voraussetzungen des Satzes 12 bzgl. $w(z) - a$ erfüllt. Damit ergäbe sich aus dem Satz 12 und $w(z) \in F_q^1$, daß $w(z)$ im Widerspruch zur Voraussetzung konstant wäre.

Wird die Konstruktion der $C_{1,p}$ und $\mathcal{S}_{\nu,\mu}^{1,p}$ beachtet, so ergibt sich die folgende, übersichtliche Fassung des Satzes 17a:

Satz 17: Sei $w(z) \in F_q^1$ und z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 mit $z_0 \in \eta Q$ (bzw. $\eta^2 Q$). Ist dann ein beliebiges reelles $\varepsilon > 0$ gegeben, so nimmt $w(z)$ außerhalb der Kreisscheiben

$$(II.4.3) \quad S_\varepsilon^{\nu,\mu} = \{z \mid |z - a_{\nu,\mu}| < \varepsilon \mathcal{S}_{\nu,\mu}^{1,1}\},$$

in hinreichend kleiner Umgebung von z_0 jeden Wert der z -Ebene höchstens endlich oft an.

Dieser Satz ist eine direkte Aussage bzgl. der Theorie der Ausfüllungskreise und liefert einige neue Ergebnisse. Diese Ergebnisse sollen anhand des im folgen zitierten (von Lehto in [XI] bewiesenen) wesentlichen Satzes kurz erläutert werden:

Satz B: Sei $w(z)$ eine in einer Umgebung des Punktes z_0 der z -Ebene meromorphe Funktion, und sei z_0 eine wesentlich singuläre Stelle von $w(z)$. Sei ferner $h(r)$ eine positive Funktion der reellen Veränderlichen r mit $h(r) = O(r)$ für $r \rightarrow 0$, und gelte für eine Punktfolge z_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$

$$(II.4.4) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ h(|z_\nu - z_0|) \frac{|w'(z_\nu)|}{1 + |w(z_\nu)|^2} \right\} = \infty$$

Dann ist bzgl. $w(z)$ die Aussage des Satzes von Picard für jedes reelle $\epsilon > 0$ in der Vereinigung jeder unendlichen Teilfolge der Kreisscheiben

$$\tilde{S}_\epsilon^\nu =_{\text{def}} \{ z \mid |z - z_\nu| < \epsilon h(|z_\nu - z_0|) \}$$

erfüllt. Ist umgekehrt für jedes reelle $\epsilon > 0$ bzgl. $w(z)$ die Aussage des Satzes von Picard in der Vereinigung jeder unendlichen Teilfolge der Kreisscheiben $\tilde{S}_\epsilon^\nu$ erfüllt, so gilt (II.4.4).

Dieser Satz liefert eine schärfste Aussage bzgl. der Theorie der Ausfüllungskreise und kann in dieser Hinsicht also nicht verschärft werden. Der Satz 17 aber ergänzt ihn für die Funktionen aus F_q^1 in verschiedener Hinsicht:

1. Der Satz B liefert seine Aussage für den Fall, daß z_0 eine isolierte wesentliche Singularität von $w(z)$ ist. Der Satz 17 hingegen gilt auch dann, wenn z_0 Häufungspunkt wesentlich singulärer Stellen von $w(z)$ ist. So können z.B. die Singularitäten $a_{\nu, \mu}$ von $w(z) \in F_q^1$ selbst schon wesentlich singuläre Stellen von $w(z)$ sein oder aber Pole und z_0 Häufungspunkt von η_Q . In beiden Fällen aber ist z_0 eine nicht isolierte wesentliche Singularität von $w(z)$. Es sei hier bemerkt, daß bzgl. dieser Singularitäten z_0 der Satz von Picard gilt, weil wegen $w(z) \in F_q^1$, die Häufungspunkte von η_Q isoliert sind.

2. Der Satz B besagt, daß in den Kreisscheiben $\tilde{S}_\epsilon^\nu$ von $w(z)$ jeder Wert der z -Ebene mit Ausnahme höchstens zweier angenommen wird. Der Satz 17 besagt für die Funktionen aus F_q^1 (vgl. 1.) das gleiche bzgl. der Kreisscheiben $S_\epsilon^{\nu, \mu}$, darüber hinaus aber auch, daß außerhalb der Kreisscheiben

$S_{\epsilon}^{\nu, \mu}$ jeder Wert der z -Ebene nur endlich oft angenommen wird. Hier sei auch darauf hingewiesen, daß infolge der Bemerkung (I. 6, 5) am Ende des Abschnittes 6 im Teil I außerdem die außerhalb der Kreisscheiben $S_{\epsilon}^{\nu, \mu}$ von $w(z)$ angenommenen Werte gewissen Beschränkungen unterliegen.

3. Vermittels des Satzes 17 kann bzgl. der Funktionen aus F_q^1 die Menge von Ausfüllungskreisen $S_{\epsilon}^{\nu, \mu}$ allein aufgrund der Kenntnis der singulären Stellen $a_{\nu, \mu}$ von $w(z)$ angegeben werden. Sind sämtliche $a_{\nu, \mu}$ Polstellen von $w(z)$, so präzisiert dies in gewisser Hinsicht die Relation $T(r, w) = T(r, a) + O(1)$ der charakteristischen Funktion von $w(z)$. Hierzu sei bemerkt, daß der Satz 17 bzgl. der Funktionen aus F_q^1 darüber Aufschluß gibt, daß sämtliche Stellen, an denen $w(z)$ Werte der z -Ebene beliebig oft annimmt, "benachbart" sind. Dies beinhaltet eine "lokale Gleichverteilung" der von $w(z)$ beliebig oft angenommenen Werte im Vergleich zur Relation $T(r, w) = T(r, a) + O(1)$, die eine "Gleichverteilung" der Anzahlen der beliebig oft angenommenen Werte bedeutet.

4. Sei U eine Umgebung von z_0 . Dann liefert der Satz 17 sofort, daß die Gesamtheit der Ausfüllungskreise $S_{\epsilon}^{\nu, \mu}$ für hinreichend kleines ϵ $U \setminus \{z_0\}$ nicht überdecken kann, und für beliebig kleines ϵ ein beliebig kleines Maß hat. Eine derartige Aussage liefert der Satz B nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über $h(r)$, die durch die Bedingung $h(|z_{\nu} - z_0|) \frac{|w'(z_{\nu})|}{1 + |w(z_{\nu})|} \geq 2$ eingeschränkt sind. Hier sei im Hinblick auf den Satz B auch folgendes bemerkt: Ist $w(z) \in F_q^1$ und jede Singularität $a_{\nu, \mu}$ von $w(z)$ ein Pol mindestens zweiter Ordnung, so ergibt sich die sphärische Ableitung $\frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|} \geq 2$ an jeder Stelle $a_{\nu, \mu}$ als Null.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei auch darauf verwiesen, daß in vielen konkreten Fällen leicht zu ersehen ist, ob die Voraussetzungen des Satzes 17 erfüllt sind. Dies ergibt sich ebenso wie aus der Abgrenzung der Funktionsklassen F_q z. B. aus dem Satz 15 und der sich seinem Beweis anschließenden Bemerkung.

Ausfüllungskreise meromorpher Funktionen bei beliebiger Lage der Singularitäten

Im Abschnitt 4 wurden speziell die Funktionen der Klasse F_q^1 betrachtet, weil infolge der Bedingungen (II. 4. 1) und (II. 4. 2) bzgl. der wesentlichen Singularitäten der Funktionen $w(z) \in F_q^1$ der Satz von Picard gilt. Die Funktionsklassen F_q lassen jedoch im Hinblick auf die Werteverteilungstheorie die Betrachtung allgemeiner Funktionen zu. Unter diesem Gesichtspunkt sollen in diesem letzten Abschnitt einige Ergebnisse aufgeführt werden.

Zunächst wird die Funktionsklasse F_q^2 abgegrenzt:

Erklärung: Sei $f(z) \in F_q$, C der Definitionsbereich von $f(z)$, $Q = \bigcup_{\nu \in \omega} U(a_\nu, \rho_\nu)$, ηQ die Menge aller Häufungspunkte von Q , und sei Q^- im C zugrunde liegenden Gebiet G enthalten. Dann gilt $f(z) \in F_q^2$.

Aus dieser Erklärung ergibt sich ebenso wie im Abschnitt 4 sofort (z. B. vermittels des Satzes 3), daß jede Funktion aus F_q^2 in $G \setminus Q^-$ regulär analytisch ist. Deshalb werden auch die Funktionen aus F_q^2 der Deutlichkeit halber durch $w(z)$ bezeichnet.

Infolge der Erklärung der Funktionsklassen F_q^1 und F_q^2 gilt

$$(II. 5. 1) \quad F_q^1 \subset F_q^2.$$

Hier sei besonders darauf hingewiesen, daß im Unterschied zum Abschnitt 4 bzgl. der Funktionen aus F_q^2 ηQ praktisch keinen Beschränkungen unterliegt.

Aus dem Satz 12 ergibt sich, daß der Satz 17a auch bzgl. der Funktionen aus F_q^2 gilt. Daher gilt auch der Satz 17 bzgl. der Funktionen aus F_q^2 .

Mit dem Satz 13 gilt aber auch der

Satz 18: Sei $w(z) \in F_q^2$, G das dem Definitionsbereich C von $w(z)$ zugrunde liegende Gebiet, und z_0 ein Punkt aus G . Dann ist $w(z)$ entweder in einer Umgebung von z_0 regulär analytisch, oder $w(z)$ kommt in jeder Umgebung von z_0 jedem Wert der z -Ebene beliebig nahe.

Dieser Satz zeigt, daß bzgl. einer Funktion $w(z) \in F_q^2$ irgendein Punkt aus ηQ entweder im Sinne des Satzes von Casorati-Weierstraß als wesentlich singuläre Stelle von $w(z)$ oder aber als hebbare Singularität von $w(z)$ zu betrachten ist.

Wegen (II. 5. 1.) gilt der Satz 18 auch für die Funktionen aus F_q^1 , wurde aber bei der Betrachtung der Funktionen aus F_q^1 nicht erwähnt, weil er dort infolge des Picardschen Satzes ohnehin gilt. Letzteres aber ist für die Funktionen aus F_q^2 im allgemeinen nicht der Fall, weil infolge der Erklärung der Funktionsklasse F_q^2 Q z. B. in einer abgeschlossenen Teilmenge von G dicht sein kann.

Aus den Betrachtungen in (II. 1) ist nun folgendes leicht zu ersehen:

Bemerkung 1: Sei G ein Gebiet der z -Ebene und A eine Punktmenge mit $A^- \subset G$. Dann existieren in F_q^2 beliebig viele Funktionen $w(z)$, so daß bzgl. jeder dieser Funktionen $A^- \subseteq Q^-$ gilt, und infolge des Satzes 19 jeder Punkt aus Q^- im Sinne des Satzes von Casorati-Weierstraß als wesentlich singuläre Stelle von $w(z)$ zu betrachten ist.

Schon mit dieser Bemerkung ergibt sich eine interessante Ergänzung der bereits in der Einleitung erwähnten Ergebnisse von Matsumoto in [XII] und [XIII], die zeigen, daß im Falle nicht isolierter wesentlicher Singularitäten ein dem Satz von Picard entsprechender, allgemeiner Satz nicht gilt.

Auf der anderen Seite zeigen Matsumoto in [XIII] und Carleson in [VII], daß unter zusätzlichen Voraussetzungen sich auch im Falle nicht isolierter, wesentlicher Singularitäten ergibt, daß höchstens endlich viele Ausnahmewerte im Sinne des Satzes von Picard existieren. Diese und die aus dem Satz 18 im Zusammenhang mit der Bemerkung 1 folgenden Ergebnisse werden nun wiederum durch den Satz 17 und die Bemerkung (I. 6. 5) am Ende des Abschnittes 6 im Teil I in beträchtlicher Weise ergänzt.

Dieses Ergebnis kann global folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Bemerkung 2: Gilt $w(z) \in F_q^2$, so vollzieht sich die durch eine wesentlich singuläre Stelle z_0 bedingte Verteilung der Funktionswerte von $w(z)$ für jedes reelle $\epsilon > 0$ in den Kreisscheiben

$$S_\epsilon^{v,\mu} = \{z \mid |z - a_{v,\mu}| < \epsilon \zeta_{v,\mu}^{1,1}\}$$

und nur dort. Insbesondere nimmt $w(z)$ in hinreichend kleiner Umgebung von z_0 außerhalb der Kreisscheiben $S_\epsilon^{v,\mu}$ jeden Wert der z -Ebene höchstens endlich oft an, sofern z_0 ein erreichbarer Punkt von C_1 ist.

Im Anschluß an diese Bemerkung 2 sei auch darauf hingewiesen, daß die im Abschnitt 4 unter 3. und 4. bzgl. des Satzes 17 angegebenen Bemerkungen auch im Hinblick auf die Funktionen aus F_q^2 gelten.

Die Betrachtung der Funktionen aus F_q^1 und F_q^2 liefert also unter anderem erste Ergebnisse zu einer Erweiterung der Theorie der Ausfüllungskreise auf den Fall, daß die wesentlichen Singularitäten der betreffenden Funktionen nicht isoliert sind. Darüber hinaus ergeben sich für die Funktionen aus F_q^1 und F_q^2 in gewissem Rahmen interessante und neue Aussagen zur Theorie der Werteverteilung meromorpher Funktionen im Falle, daß die wesentlichen Singularitäten isoliert oder auch nicht isoliert sind, worauf im Abschnitt 4 und 5 des Teils II eingegangen wurde.

Literaturverzeichnis

- [I] Bieberbach, L. Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 1, IV. Aufl.
Chelsea, New York (1945)
- [II] Borel, E. Sur quelques points de la théorie des fonctions ^{*)},
Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser. 3 12, 9-55 (1895)
- [III] Borel, E. Sur la généralisation du prolongement analytique ^{*)},
C.R. Acad. Sci. Paris 130 , 1115-1118 (1900)
- [IV] Borel, E. Les fonctions monogènes non-analytiques ^{*)},
Bull. Soc. Math. France 40, 205-219 (1912)
- [V] Carleman, T. Sur les séries $\frac{A_n}{z-\alpha_n}$
C.R. Acad. Sci. Paris 174, 588-591 (1922)
- [VI] Carleman, T. Les fonctions quasi-analytiques,
Gauthier-Villars, Paris (1926)
- [VII] Carleson, L. A remark on Picard's theorem,
Bull. Amer. Math. Soc. 67, 142-144 (1961)
- [VIII] Dinghas, A. Vorlesungen über Funktionentheorie,
Springer, Berlin (1961)
- [IX] Julia, G. Les séries de fractions rationnelles itérées et les
fonctions quasi-analytiques,
Ark. Mat. 22 A (7) (1930-1932)
- [X] Lehto, O. A generalisation of Picard's theorem,
Ark. Mat. 3, 495-500 (1952)
- [XI] Lehto, O. The spherical derivative of meromorphic functions
in the neighbourhood of an isolated singularity,
Comment. Math. Helv. 33, 196-205 (1959)
- [XII] Matsumoto, K. Exceptional values of meromorphic functions in a
neighborhood of the set of singularities,
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 24, 143-153 (1960)
- [XIII] Matsumoto, K. On the exceptional values of meromorphic
functions with the set of singularities of capacity zero,
Nagoya Math. J. 18, 171-187 (1961)
- [XIV] Turan, P. Eine neue Methode in der Analysis und deren
Anwendungen,
Akadémiai Kiado, Budapest (1953)

^{*)} Diese Arbeit ist auch enthalten in : Selecta. Jubilé scientifique de
M. Emile Borel, Fonctions monogènes d'une variable complexe;
Gauthier-Villars, Paris (1940)

LEBENS LAUF

Am 7. Februar 1936 wurde ich als Sohn des 1945 für tot erklärten Fleischermeisters Herbert Winkler und seiner Ehefrau Käte geb. Werner in Berlin geboren. Im Herbst 1942 wurde ich in eine Volksschule in Berlin-Reinickendorf eingeschult. In den Jahren 1946 - 1955 besuchte ich die "1. O. W. Z. zu Berlin-Reinickendorf", an der ich im Frühjahr 1955 auch die Reifeprüfung ablegte.

Vom Wintersemester 1955/56 bis zum Sommersemester 1961 studierte ich an der Freien Universität Berlin Mathematik und legte im Dezember 1960 an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Vom August 1961 bis zum Februar 1962 war ich wissenschaftlicher Mitarbeiter des Zentralinstitutes für Angewandte Mathematik der Kernforschungsanlage Jülich in Aachen.

Seit Mai 1962 bin ich wissenschaftlicher Assistent im unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. W. Haack stehenden Sektor Mathematik des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung Berlin.

Während der ersten Semester meines Studiums wurde ich wesentlich durch Herrn Prof. Dr. A. Dinghas und Herrn Prof. Dr. F. Levi an die Mathematik herangeführt. Meine mathematische Ausbildung erhielt ich insbesondere durch Herrn Prof. Dr. A. Dinghas, unter dessen Leitung ich auch meine Diplomarbeit und die vorliegende Arbeit schrieb; ich bin Herrn Prof. Dinghas sehr zu Dank verpflichtet. Ferner hörte ich mathematische Vorlesungen bei den Herren Prof. Dr. K. P. Grotemeyer, Prof. Dr. H. Meschkowski, Prof. Dr. H. Ostmann, Prof. Dr. H. Pachale, Prof. Dr. R. Ritter und Prof. Dr. A. Stöhr.

